Esercitazioni di Analisi Matematica 1
Ingegneria Edile-Architettura – Prof. A. Bonfiglioli

Foglio 10 - Test di convessità

► **Esercizio** 1. Dopo aver determinato $f''(x)$, trovare gli intervalli in cui le seguenti funzioni $f(x)$ sono concave e convesse e segnalare gli eventuali punti di flesso (attenzione! si tenga conto del dominio di definizione di f e degli intervalli in cui essa risulta di classe C^2):

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{2x}}$

$$f''(x) = 2\frac{2x^2 - 4x + 1}{e^{2x}}$$

f è convessa in $\left]-\infty, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$ e in $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$

f è concava in $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$

flessi nei punti di ascissa $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

---

2. $f(x) = e^x \cdot (e^x - 1)$

$$f''(x) = e^x \cdot (4\, e^x - 1)$$

f è convessa in $[-\ln 4, +\infty[$

f è concava in $]-\infty, -\ln 4]$

flesso nel punto di ascissa $-\ln 4$

---

3. $f(x) = e^{(x-1)/(2\,x)}$

$$f''(x) = e^{(x-1)/(2\,x)} \cdot \frac{1-4x}{4x^4}$$

f è convessa in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 1/4]$

f è concava in $[1/4, +\infty[$

flesso nel punto di ascissa $1/4$

Attenzione: sono errori molto gravi asserire che f è convessa in $]-\infty, 1/4]$ o asserire che lo è nell'insieme unione $]-\infty, 0[\,\cup\,]0, 1/4]$!!!

---

4. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

$$f''(x) = 2\ln x + 3$$

f è convessa in $\left[e^{-3/2}, +\infty\right[$

f è concava in $\left]0, e^{-3/2}\right]$

flesso nel punto di ascissa $e^{-3/2}$

---

5. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$$

f è convessa in $\left]1, e^2\right]$

f è concava in $]0, 1[$ e in $\left[e^2, +\infty\right[$

flesso nel punto di ascissa e^2

Attenzione: è un errore molto grave asserire che f ha un flesso in $x = 1$: tale punto non appartiene neppure al dominio di $f(x)$!!!

---

6. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln x - 1}$

$$f''(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2 (\ln x - 1)^3}$$

f è convessa in $]0, 1/e]$ e in $]e, +\infty[$

f è concava in $[1/e, e[$

flesso nel punto di ascissa $1/e$

Attenzione: è un errore molto grave asserire che f ha un flesso in $x = e$: tale punto non appartiene neppure al dominio di $f(x)$!!!

---

7. $f(x) = e^x \, |1 - 2x|$

$$f''(x) = -e^x \cdot \operatorname{sign}(1 - 2x) \cdot (2x + 3)$$

f è convessa in $]-\infty, -3/2]$ e in $[1/2, +\infty[$

f è concava in $[-3/2, 1/2]$

flesso nel punto di ascissa $-3/2$

Attenzione: per alcuni autori anche $x = 1/2$ potrebbe essere considerato un punto di flesso; è tuttavia importante osservare che $x = 1/2$ non è un punto di derivabilità di f (quindi non esiste nemmeno la derivata seconda di f in tale punto!), sebbene sia un punto di continuità per f.

---

8. $f(x) = x^3 (2 - x)^2$

$$f''(x) = 4\,x\,(5\,x^2 - 12\,x + 6)$$

f è convessa in $\left[0, \frac{6-\sqrt{6}}{5}\right]$ e in $\left[\frac{6+\sqrt{6}}{5}, +\infty\right[$

f è concava in $]-\infty, 0]$ e in $\left[\frac{6-\sqrt{6}}{5}, \frac{6+\sqrt{6}}{5}\right]$

flessi nei punti di ascissa 0, $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ e $\frac{6+\sqrt{6}}{5}$

---

9. $f(x) = e^x \cdot \dfrac{x}{x+4}$

$$f''(x) = e^x \, \frac{x^3 + 8x^2 + 24x + 24}{(x+4)^3}$$

[osservare che il polinomio al numeratore si azzera per $x = -2$; scomporlo con la regola di Ruffini in $(x+2)(x^2 + 6\,x + 12)$]

f è convessa in $]-\infty, -4[$ e in $[-2, +\infty[$

f è concava in $]-4, -2]$

flesso nel punto di ascissa -2 (ma non in -4 !!!)

---

10. $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}\right)$

$$f''(x) = -10\, \frac{3x^4 + 3x^2 + 4}{(x^2-1)^2\,(x^2+4)^2}$$

f non è convessa su alcun intervallo

f è concava in $]-\infty, -1[$ e in $]1, +\infty[$

non ci sono punti di flesso

---

11. $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$

$$f''(x) = e^x \, \frac{4x^2 - 4x + 3}{4\,x^2\sqrt{x}}$$

f è convessa su $]0, +\infty[$

f non è concava in alcun intervallo

non ci sono punti di flesso

---

12. $f(x) = \log\left(\dfrac{|x| - 1}{x}\right)$

$$f''(x) = \frac{1 - 2\,|x|}{x^2\,(|x|-1)^2}$$

f è convessa in $[-1/2, 0[$

f è concava in $]-1, -1/2]$ e in $]1, +\infty[$

flesso nel punto di ascissa $-1/2$

Attenzione: calcolare preventivamente il dominio di f: $]-1, 0\,[\, \cup \,]\,1, +\infty\,[$

---

13. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$

$$f''(x) = \frac{5 - x}{4\,(x-2)^{5/2}}$$

f è convessa in $]2, 5]$

f è concava in $[5, +\infty[$

flesso nel punto di ascissa 5

Attenzione: calcolare preventivamente il dominio di f: $]2, +\infty\,[$
